Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2018

Übungsblatt 5

Wir haben nun eine zusätzliche Struktur auf Vektorräumen definiert. Wenn auf einem Raum ein Skalarprodukt existiert, dann sprechen wir von einem euklidischen Raum. In diesem Fall kann man in Analogie zu $\mathbb{R}^n$ auch die Norm (oder Länge) eines Vektors definieren und man nennt zwei Vektoren orthogonal, wenn deren Skalarprodukt 0 ist.

In $\mathbb{R}^n$ gilt für das Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos \varphi,$$

wobei φ der Winkel zwischen $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ ist. Daraus folgt gleich $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$. Auch in allgemeinem euklidischem Raum gilt für alle Vektoren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\|.$$

Das ist die berühmte Cauchy-Bunjakowski-Schwarz-Ungleichung, die die Namensgeber unabhängig für Spezialfälle gezeigt haben und deren Beweis im Allgemeinen die Aufgabe 1 (a) ist.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Freitag, der 8. Juni 2018, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Es sei V ein euklidischer Raum.

(a) Zeigen Sie die Cauchy-Bunjakowski-Schwarz-Ungleichung, indem Sie sich die Ungleichung

$$\|\boldsymbol{u} - \alpha \boldsymbol{v}\|^2 \geq 0 \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{v}\|^2}.$$

für beliebige $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \neq 0$ anschauen.

(b) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$$

für alle $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$.

2. Finden Sie eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

und bestimmen eine orthogonale Matrix Q und eine Diagonalmatrix Λ, so dass $A = Q\Lambda Q^T$.

3. Es sei V der Vektorraum alle Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens 2 auf $[0, 1]$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\ dx$$

ein Skalarprodukt auf V definiert ist.

(b) Finden Sie eine Orthonormalbasis für V, indem Sie auf die Basis $(1, x, x^2)$ das Gram-Schmidt'sche Verfahren anwenden.

4. Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Drehungen (also $f, g \in SO(3)$), wobei f eine Drehung um die x-Achse um einen rechten Winkel und g eine Drehung um die z-Achse um einen rechten Winkel sei.

(a) Geben Sie die zugehörigen Matrizen an.

(b) Es gilt, die Verkettung $g \circ f$ ist wieder eine Drehung. Bestimmen Sie die zugehörige Drehachse.